Grado en Biotecnología – Ejercicios de Análisis Matemático

Relación 2 - Aplicaciones del cálculo matricial

1. Estudia si las siguientes matrices son diagonalizables y, en caso afirmativo, encuentra matrices $\mathbf{D}$, diagonal, y $\mathbf{P}$, inversible, tales que $\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -7 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Considera la matriz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Estudia si es diagonalizable y calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{5^n}\mathbf{M}^n$.

3. Considera la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Estudia si es diagonalizable y calcula el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} M^n$.

4. Se considera la matriz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula los valores de a para los que dicha matriz es diagonalizable.

b)Para $a = 3$ calcula las matrices $\mathbf{D}$, diagonal, y $\mathbf{P}$, inversible, tales que $\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$. Calcula también en este caso $\mathbf{M}^n$ (debes expresar todos los elementos de $\mathbf{M}^n$ en función de n de la forma más simplificada posible).

5. Una población (de hembras) está dividida en dos grupos de edad: jóvenes y adultos . En cada etapa 3/4 de las jóvenes llegan a adultos. El número medio de crías de las hembras jóvenes es de 2 y el de las adultas es de 4.

a) Escribe la ecuación matricial que representa la dinámica de esta población.

b) Diagonaliza la matriz $\mathbf{M}$ y calcula $\mathbf{M}^n$ (debes expresar todos los elementos de $\mathbf{M}^n$ en función de n de la forma más simplificada posible).

c) Calcula la matriz $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\lambda^n}\mathbf{M}^n$ donde λ es el valor propio dominante.

d) Discute el comportamiento en el futuro de la población y calcula las proporciones a largo plazo de los grupos de edad.

6. La dinámica de una población estructurada en dos grupos de edad, “jóvenes” y “adultos”, está dada por $\mathbf{X}(n+1) = \mathbf{M}\mathbf{X}(n)$ donde $\mathbf{M}$ es la matriz de Leslie:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Interpreta biológicamente cada elemento de la matriz.

2) Diagonaliza la matriz $\mathbf{M}$ y calcula $\mathbf{M}^n$ (debes expresar todos los elementos de $\mathbf{M}^n$ en función de n de la forma más simplificada posible).

3) Calcula la matriz $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\lambda^n}\mathbf{M}^n$ donde λ es el valor propio dominante.

4) Discute el comportamiento en el futuro de la población y calcula las proporciones a largo plazo de los grupos de edad.

7. Una población de hembras está dividida en tres grupos de edad: crías, jóvenes y adultas. Las crías no se reproducen, en cada etapa cada hembra joven tiene por promedio 2 crías y las adultas 3. En cada etapa una cuarta parte de las crías pasan a jóvenes y dos terceras partes de las jóvenes pasan a adultas. Sea $\mathbf{X}(n) = (x_1(n), x_2(n), x_3(n))$ es el vector que representa el número de hembras de cada grupo en la etapa n. La distribución inicial de los grupos es $\mathbf{X}(0) = (200, 100, 80)$.

   a) Calcula la matriz $\mathbf{H} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{M}^n$ donde $\mathbf{M}$ es la matriz de Leslie que describe la dinámica de esta población.

   b) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{X}(n)$ y comprueba que el resultado obtenido es igual a $\mathbf{HX}(0)$.

   c) Explica el comportamiento de la población a largo plazo.

8. Un territorio está dividido en tres zonas E_1, E_2 y E_3 en las que habita una población de aves. Cada año se producen los siguientes flujos migratorios entre las distintas zonas:

   De los que están en E_1 un 10 % emigra a E_2 y un 30 % emigra a E_3.

   De los que están en E_2 un 10 % emigra a E_1, un y un 10 % emigra a E_3.

   De los que están en E_3 un 10 % emigra a E_1 y un 20 % emigra a E_2.

   Supongamos que inicialmente de la población total de aves un 30 % vive en E_1, un 20 % vive en E_2 y un 50 % viven en E_3. ¿Cuál será la distribución de la población de aves a los 2 años? ¿Y a los n años? A largo plazo ¿cuál será la probabilidad de que un ave esté en cada zona? ¿Depende esta probabilidad final de la distribución inicial de las aves?.

9. En una ciudad existen dos partidos políticos, uno conservador y otro liberal. Los alcaldes son elegidos por un período de un año y se ha observado que la probabilidad de que a un alcalde conservador suceda otro conservador es 3/5 y que a un alcalde liberal siga otro liberal es 1/2. Supongamos que en 2005 hay alcalde liberal. ¿Cuál será la probabilidad de que en 2008 el alcalde sea liberal?

10. Un hombre conduce su coche o toma el tren para ir a trabajar cada día. Supongamos que nunca toma el tren dos días seguidos; pero si conduce para ir a trabajar, entonces al día siguiente es tan probable que conduzca de nuevo como que tome el tren.

    a) Escribe la matriz de transición del proceso.

    b) Calcula la probabilidad de que vaya en coche, cuatro días después de haber ido en tren.

11. Consideremos un edificio con tres pisos con ascensor. Se sabe que la mitad de los viajes que parten del primer piso se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el segundo piso, sólo el 25 % de las veces finaliza en el tercero. Por último, si un trayecto comienza en el tercer piso, siempre termina en el primero.

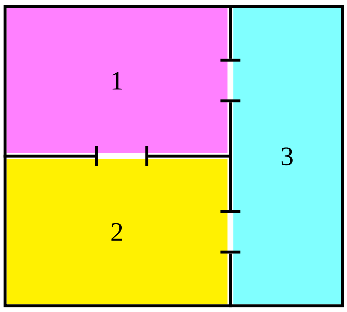
    a) Calcula la matriz de transición de la cadena y representa su gráfico asociado. ¿Es regular?

    b) ¿Dónde es más probable que esté el ascensor después de cuatro viajes, si salió del primer piso?

12. Una familia planifica cada año sus vacaciones de la siguiente manera. Si un año va a la montaña al año siguiente va al mar y al segundo año descansa en la casa. Pero al año siguiente es igualmente probable que se traslade al mar o a la montaña. En 2005 quedarán en casa. ¿Dónde es más probable que pasen sus vacaciones en el año 2010? ¿Cuál es la probabilidad a largo plazo de que vayan a la montaña?

13. Un supermercado realiza la experiencia siguiente en relación con las preferencias de sus clientes. Se observa que: El 80 % de las personas que compran un día el producto A repite al día siguiente. El 60 % de los que no compran el producto A un día, lo compran al día siguiente. Si el 50 %

compró el producto un día determinado, ¿qué podemos predecir para la compra del producto el segundo día? ¿Y para el tercero?

14. Supongamos que en un laboratorio se coloca un conjunto de ratones en una caja dividida en tres compartimentos comunicados y todos con la misma facilidad de acceso, tal y como se indica en la figura de la derecha. Los compartimentos permanecen cerrados y se abren cada lunes. Cada semana todos los ratones cambian de compartimento y eligen al azar otro. Sea $\mathbf{X}(n) = (x(n), y(n), z(n))^t$ donde $x(n), y(n), z(n)$, son, respectivamente, el número de ratones que hay en los compartimentos 1, 2 y 3. Supongamos que $\mathbf{X}(0) = (10, 15, 20)$.
    

    1) Expresa la dinámica de este proceso en la forma $\mathbf{X}(n+1) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}(n)$ donde $\mathbf{M}$ es una matriz que debes calcular.
    2) Diagonaliza la matriz $\mathbf{M}$.
    3) Calcula la distribución de los ratones al cabo de 5 semanas.
    4) Estudia cómo será a largo plazo la distribución de los ratones.

15. Un cultivo de plantas que, según su genotipo, pueden dar flores azules (AA), verdes (Aa) o amarillos (aa), se somete a un proceso de polinización en el cual las plantas de flores azules se fecundan con polen de plantas de flores amarillas, las de flores verdes con polen de ellas mismas y las de flores amarillas con polen de plantas de flores azules. Estudia la distribución de los genotipos en las sucesivas generaciones y su evolución a largo plazo.

16. La expresión de un cierto carácter en una población animal depende de dos alelos de un gen autosómico A y a. Iniciamos un proceso de cruce con una pareja de genotipos AA y Aa. Supuesto que esta pareja tiene un descendiente solamente, lo volvemos a cruzar con otro de genotipo Aa y este proceso se repite: cada pareja tiene un descendiente que lo cruzamos con otro de genotipo Aa. Formula este proceso como una cadena de Markov y calcula las probabilidades a largo plazo de obtener cada uno de los genotipos AA, Aa y aa.